Feuille d'Exercices III
Calcul Stochastique

Exercice 1. Soient $\{B_t\}$ un mouvement brownien standard et $\alpha > 0$.

1. Prouver que $X_t^{(\alpha)} = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)$ est une martingale.

2. Utiliser $X_t^{(\alpha)}$ pour calculer $\phi(\lambda) = \mathbb{E}[\exp(-\lambda\tau)]$ où $\tau = \inf\{t \geqslant 0, B_t = A \text{ ou } B_t = -A\}$.

3. En déduire $\mathbb{E}[\tau^2]$.

Exercice 2. **1.** Soit $\{M_t\}$ une martingale positive, montrer que pour $s < t$, on a

$$\{\omega \in \Omega,\ M_s(\omega) = 0\} \subset \{\omega \in \Omega,\ M_t(\omega) = 0\}.$$

2. Soit $\{M_t\}$ une martingale continue.

- **a.** Montrer que si $\tau = \inf\{t \geqslant 0,\ M_t = 0\}$ alors $M_{\tau(\omega)}(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \{\omega,\ \tau(\omega) < +\infty\}$.
- **b.** Montrer que si $M_T > 0$ presque sûrement alors $\mathbb{P}(M_t > 0 \text{ pour tout } t \leqslant T) = 1$
  Indication: Essayer de prouver que $P(\tau \leqslant T) = 1$ en utilisant le théorème d'arrêt.
- **c.** $(\star)$ Construisez un processus continu tel que $\mathbb{P}(X_t > 0) = 1\ \forall t \leqslant T$ mais $\mathbb{P}(X_t > 0 \text{ pour tout } t \leqslant T) = 0$.

.

Exercice 3. **1.** Soit $\{M_t\}$ une martingale continue positive telle que $\lim_{t\to\infty} M_t = 0$ et $M_0 = 1$. Pour $x > 1$, soit $\tau_x = \inf\{t,\ M_t \geqslant x\}$. Montrer que

$$\lim_{t\to\infty} M_{t\wedge\tau_x} = x\mathbb{1}_{\tau_x<\infty}.$$

2. En déduire $\mathbb{P}(\tau_x < \infty)$.

3. Soit $M^* = \sup_{t\geqslant 0} M_t$. Calculer $\mathbb{P}(M^* \geqslant x)$.

4. Soient B un mouvement brownien standard et $\theta > 0$. On définit $X_t = B_t - \theta t$. Montrer que $M_t = \exp(2\theta B_t - 2\theta^2 t)$ est une martingale et montrer que $X^* = \sup_{t\geqslant 0} X_t$ est presque surement finie et suit une loi exponentielle de paramètre 2θ.

Exercice 4. Soit U_t un pont brownien définit dans la Feuille II.

1. En utilisant l'exercice 5 de la feuille précédente, montrer qu'il existe un mouvement brownien B tel que pour $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$U_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}.$$

2. Montrer que pour tout $a > 0$,

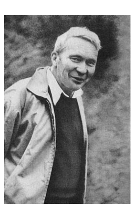
$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} U_t > a\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{s>0}(B_s - as) > a)\right)$$

3. Utiliser l'exercice précédent pour trouver la fonction de répartition et la densité de $\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} U_t$.

Exercice 5. Soit B un mouvement brownien standard.

1. Montrer que $X_t = B_t^3 - 3tB_t$ est une martingale

2. Soient $a, b > 0$ et $\tau = \inf\{t \geqslant 0,\ B_t \notin (-B, A)\}$. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(\tau, B_\tau)$.



Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov
(1903–1987)

Jean-André Ville
(1910–1989)